Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P (1; 0) против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 47). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 48).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

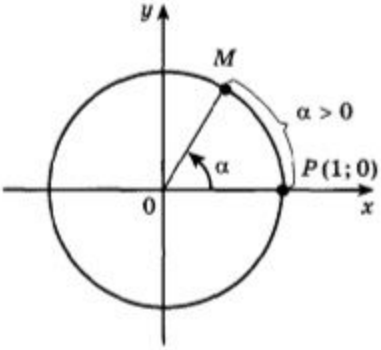


Рис. 47

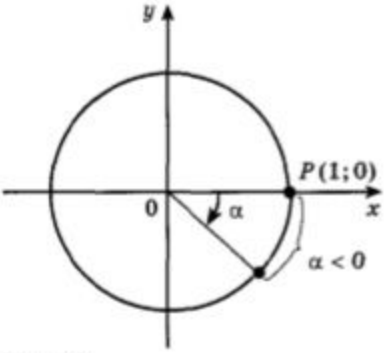


Рис. 48

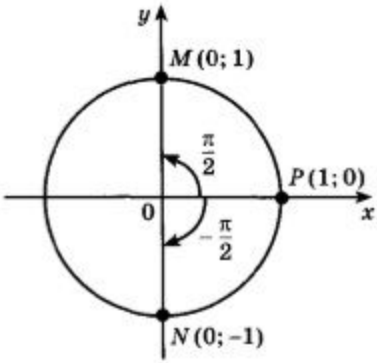


Рис. 49

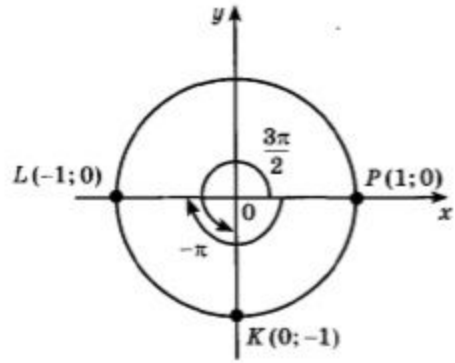


Рис. 50

Примеры.

1) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка M (0; 1).

2) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка N (0; –1).

3) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 50) получается точка K (0; –1).

4) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\pi$ рад (рис. 50) получается точка L (–1; 0).

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270°; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на –90°.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мере (рис. 51)

Отметим, что при повороте точки P (1; 0) на 2π, т. е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение (см. рис. 51). При повороте этой точки на -2π, т. е. на –360°, она также возвращается в первоначальное положение.

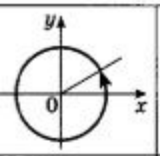
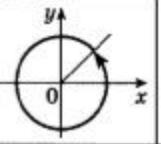
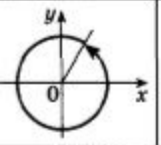
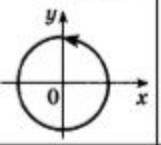
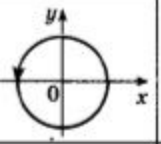
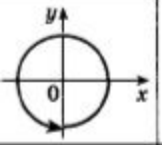
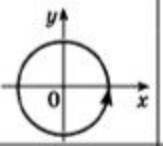
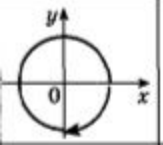
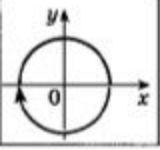
	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

Рис. 51

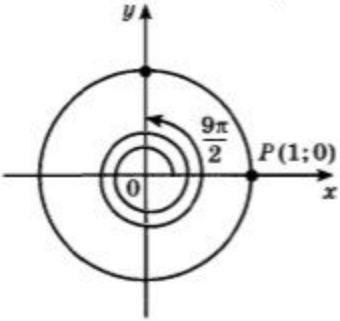


Рис. 52

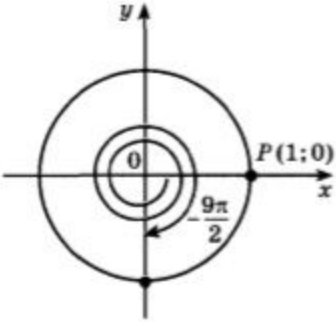


Рис. 53

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 53). Заметим, что при повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 53).

то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M (рис. 54).

Задача 1 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

▶ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т.е. получается точка с координатами $(-1; 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0; -1)$. ◁

Задача 2 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1; 0)$, чтобы получить точку $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

▶ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 55) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно,

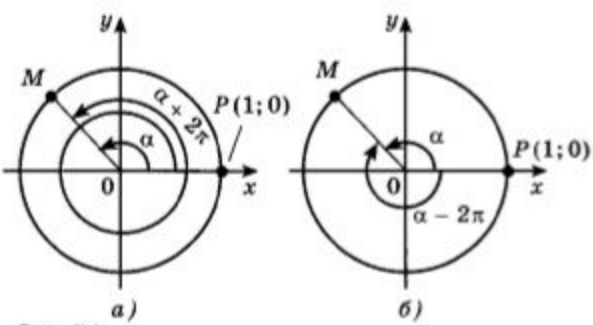


Рис. 54

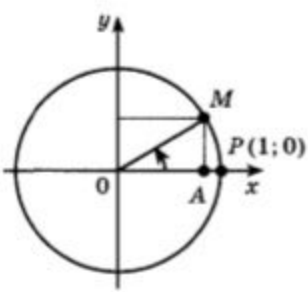


Рис. 55

все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0

чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются та

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число. ◁

Упражнения

416 Найти координаты точки единичной окружности, получе
ной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную п
воротом точки (1; 0) на заданный угол **(417—419)**.

417 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{3}{4}\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{5}{4}\pi$; 6) $-225°$.

418 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

419 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число; 2) $-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, k — цел

число; 3) $-\pi + 2\pi k$, k — целое число; 4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi$

k — целое число.

420 Найти координаты точки, полученной поворотом точ
P (1; 0) на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

421 Найти координаты точки, полученной поворотом точ
P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

422 Найти координаты точки, полученной поворотом точ
P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $\frac{\pi}{2} \pm \pi$; 2) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2} + \pi k$; 4) $-\pi + \pi k$.

423 Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0
чтобы получить точку с координатами:

1) (1; 0); 2) (–1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1).