ПЕРВООРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Определение первообразной функции

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y=f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Свойство первообразных

Если F(x) – первообразная для функции f(x) на заданном промежутке, то функция f(x) имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде F(x) + C, где C – произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация

Графики всех первообразных данной функции f(x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Oy.

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных. Если F(x) – первообразная для f(x), а G(x) – первообразная для g(x), то F(x) + G(x) – первообразная для f(x)+g(x).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной. Если F(x) – первообразная для f(x), и k – постоянная, то $k \cdot F(x)$ – первообразная для kf(x).

3. Если F(x) – первообразная для f(x), и k, b – постоянные, причём $k \neq 0$, то 1/k*F(kx + b) – первообразная для f(kx + b).

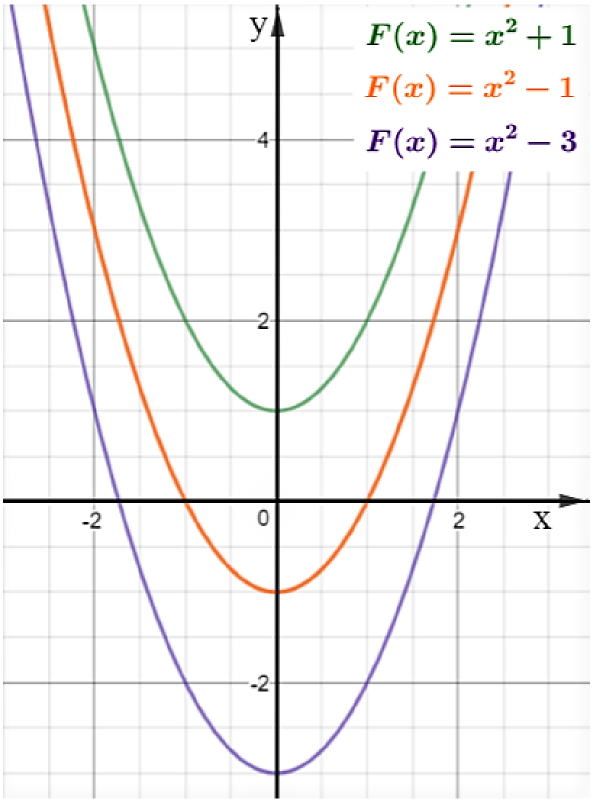
Любая функция $F(x) = x^2 + C$, где C – произвольная постоянная, и только такая функция, является первообразной для функции $f(x) = 2x$.

Например:

$F'(x) = (x^2 + 1)' = 2x = f(x)$;

$f(x) = 2x$, т.к. $F'(x) = (x^2 – 1)' = 2x = f(x)$;

$f(x) = 2x$, т.к. $F'(x) = (x^2 – 3)' = 2x = f(x)$;



Связь между графиками функции и ее первообразной

1. Если график функции f(x)>0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) возрастает на этом промежутке.

2. Если график функции f(x)<0 на промежутке, то график ее первообразной F(x) убывает на этом промежутке.

3. Если f(x)=0, то график ее первообразной F(x) в этой точке меняется с возрастающего на убывающий (или наоборот).

Для обозначения первообразной используют знак неопределённого интеграла, то есть интеграла без указания пределов интегрирования.

Таблица формул для нахождения первообразных

Функция	Первообразные
a	$ax+C$
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)+C$
e^x	e^x+C

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$

При нахождении первообразных используются формулы и правила.

Правило 1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Если функции y – f(x) и y – g(x) имеют на промежутке X первообразные соответственно y – F(x) и y = G(x), то и сумма функций y = f(x) + g(x) имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция y=F(x)+G(x).

Правило 2. Если F(x) – первообразная для f(x), то kF(x) – первообразная для kf(x).

Теорема 1. Если y = F(x) – первообразная для функции y = f(x), то первообразной для функции y = f(kx + m) служит функция y = (1/k) F(kx + m).

Теорема 2. Если y = F(x) – первообразная для функции y = f(x) на промежутке X, то у функции y = f(x) бесконечно много первообразных, и все они имеют вид y=F(x)+C.

ИНТЕГРАЛ

Интеграл бывает неопределенный и определенный.

Неопределенный интеграл – это множество всех первообразных F(x)+C некоторой функции f(x):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Определённый интеграл от функции f(x) на отрезке [a b] – предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю, если он существует независимо от разбиения и выбора точек внутри элементарных отрезков:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$