

Равносильность уравнений, неравенств

Определение равносильности уравнений, неравенств

Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

или

Два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Примеры равносильности уравнений, неравенств

1) Уравнения $4x-3=2x+3$ и $2x=6$ равносильны, т.к. каждое из них имеет только один корень $x=3$.

2) Уравнения $(x-2)(x+5)=0$ и $x^2+3x-10=0$ также равносильны, т.к. у них одни и те же корни $x_1=2$, $x_2=-5$.

3) Уравнения $3x=6$ и $4x^2=16$ не равносильны, потому что у первого уравнения корень $x=2$, а у второго уравнения два корня $x=2$ и $x=-2$.

Из определения равносильности следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот.

Решение равносильности уравнений, неравенств решается в три этапа

Первый этап – технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow \dots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап – анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап – проверка. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x , при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x)f(x) = h(x)g(x), \text{ где } h(x) \neq 0 \text{ и } h(x) \text{ имеет смысл в ОДЗ данного уравнения}$$

Следствием теоремы 4: если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n = (g(x))^n, \text{ где } f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \text{ и } n=2k \text{ (чётное число)}.$$

Например, $x - 1 = 3$; $x = 4$

Умножим обе части на $(x - 2)$:

$(x - 2)(x - 1) = 3(x - 2)$; $x = 4$ и $x = 2$ – посторонний корень $\Rightarrow$ проверка.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными.

Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Пример 1

Решим уравнение:

$$\sqrt{x} = x - 2$$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x = (x - 2)^2$, которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня $x_1 = 1, x_2 = 4$, а у первоначального уравнения только один корень $x=4$.

Пример 2

1. Неравенства $\frac{x+3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x < 3$.

2. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и $2x > x-1$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x < -1$ и $x > 1$, а решениями второго – числа $x > -1$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.